# 第六章 牛頓萬有引力

本章的地位：

在學習過第四章及第五章後，接著要介紹牛頓的另一個重要的發現——萬有引力，藉由對萬有引力的發展歷史來引出下一章有關位能與動能的定義，所以這一章算是第七章的前導。

## 6-1 克卜勒的行星運動三定律

牛頓已先前伽利略再力學方面的基礎建立的一個力學體系——牛頓的三個運動定律；牛頓還有一個重要的貢獻便是運用天文學家克卜勒的研究基礎建立了萬有引力定律，所以在介紹萬有引力之前必須先介紹克卜勒的行星運動三定律。

在哥白尼提出以太陽為中心的行星運動理論之後，克卜勒便運用許許多多的行星觀察數據資料推論出三個定律（至於歷史的部分請看課本或其他有關書籍）：

克卜勒第一定律：（又稱為橢圓軌道定律）

太陽系的行星，各在以太陽為焦點的一個橢圓軌道上運行。

克卜勒第二定律：（又稱為等面積定律）

太陽連至一行星之線，於相等時間內會掃過相等面積。

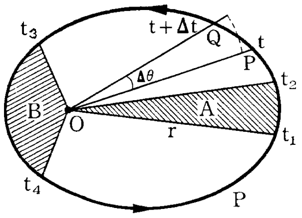
克卜勒第三定律：（週期與半徑之關係）

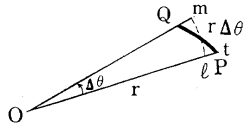
行星距太陽的平均距離 R 的立方，與行星繞太陽週期 T 的平方之比值 $\frac{R^3}{T^2}$，對各個行星皆相同。

克卜勒因為本身的數學非常強，所以在分析行星觀察的資料時，能夠推論出第一、二定律，但是對為何會如此卻無法解釋，接著又經過精密的計算，在 1619 年得到第三定律，這些都是由資料累積而得，並沒有一套完整的理論來支持這些定律，不過單單從資料能得到這些結果也足以代表克卜勒的偉大了。

關於第一定律，它是克卜勒把每個行星的軌道都加以比較得到的結果，所以適用於繞太陽的每顆行星。

關於第二定律，它是針對太陽系的某顆行星來做討論，我們可以把它用數學方式表示出（如下圖）：




上圖中我們可以用近似的方法來推導第二定律，至於真正的推導必須到高三的理科數學運用微積分來證明，首先以圖中的 A 部分來討論：

$$\Delta A \cong \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} \cong \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

依據上面的推論可以得到：

※ $\boxed{\frac{1}{2} r_A^2 \omega_A = \frac{1}{2} r_B^2 \omega_B}$，又因為在兩端的運動極為類似圓周運動（$v = r\omega$），所以在兩端的特殊例子中可以得到 $\boxed{r_A v_A = r_B v_B}$

※ 克卜勒是同時提出第一及第二定律的，因為等面積速率可以說是橢圓軌道的必然現象。

關於第三定律，它所指的意思是對太陽系中所有的行星皆適用（當時只包含水星、金星、地球、木星、土星），太陽系中每一個行星的 $\frac{R^3}{T^2}$ 皆為定值，若 A、B 分別代表不同行星，則：

$$\boxed{\frac{R_A^3}{T_A^2} = \frac{R_B^3}{T_B^2}}$$

其中 R 為平均距離，亦即最大距離與最小距離的平均：

$$R = \frac{1}{2}\left(r_{\max} + r_{\min}\right)$$

※ 事實上克卜勒的三個定律後來證實適用於所有的星系，因為這是由於所有星體之間是以萬有引力來運行的。

※ 大家不要忘記，到目前為止都還是觀察得到的，尚未有理論的依據。

※ 其實這個時候已經有一些平方反比引力的概念，只是還沒有人能證實平方反比引力與橢圓軌道有什麼關係。

## 6-2 萬有引力定律

牛頓研究月球繞地球轉動，知道必須有一向心力。據說他由於蘋果落地，而領悟到提供月球的向心力，必定同是使蘋果下墜的重力。他開始思索這個問題，大約是在他二十三歲前後，1665-1666 年間，因為鼠疫，劍橋停課，他回到鄉間家中，在清靜的環境中，創展微積分方法，想用以計算在平方反此引力下運動的軌道。但他未將他的研究結果公請於世達二十年之久。因為萬有引力的創議是科學發展史中無此的偉大成就，我們略講一些關於它的故事。

和牛頓同時的有虎克（Robert Hooke，1636-1703）、哈雷（Edmund Halley，1666-1742）和雷恩（Chrietopher Wren，1632！1723）幾人（虎克支持光的波動理論，和牛頓的光粒子論對立；哈雷是發現以他的姓氏命名彗星的天文學家；雷

恩是科學家，以建築聖保羅大教堂著稱)。1684 年某日，他們三人討論，如太陽以平方反比定律的力吸引行星，則行星的軌道為何的問題。當時由克卜勒第一定律，已知行星的軌道是橢圓曲線，至於平方反比定律，則係猜測的。虎克答稱他已知行星的軌道係橢圓，雷恩謂如他能將計算出示，則願給他四十先令(英幣)。惟時過數月，毫無所聞。哈雷乃訪牛頓於劍橋，並問他這問題。牛頓直率答稱：「橢圓」，並說他已早於 1677-1678 年計算出來，如給他些時日，當可將計算找出來。哈雷力勸牛頓將他的結果公布於世，並願擔負印刷費用。牛頓始決定寫作他的大著，原文係拉丁文，書名可譯為自然哲學的數學原理，簡稱原理（Principia)，共三冊。虎克揚言謂牛頓係由他獲得平方反此的啟示的，實則牛頓早在 1665 年時已得此鑰鍵。牛頓聞之甚憤怒，頗欲不將講天體力學部分的第三冊付梓，經哈雷力勸，始將全書於 1687 年出版。

牛頓的大著原理，全面改變了科學的內涵和精神。

其實牛頓真正偉大的地方在於創造了微積分，有了微積分物理上許許多多問題都可以方便而迅速的解決,所以一個偉大的物理學家在數學方面也必須有一定的背景知識，這裡給大家一點啟示。

另外要把蘋果與地球的引立即太陽與行星的引力聯想在一起也是一項偉大的假設。

## 6-2 (1) 平方反比引力

牛頓當初用微積分證明平方反比定律可以導出克卜勒的三個定律，但是過程很複雜，我們現在反過來利用牛頓第二運動定律及克卜勒第三定律反推回平方反比定律，如此仍然可以得到牛頓的萬有引力定律；首先先假設一物體(質量 m)繞著另一物體(質量 M)以半徑為 R 作等速率圓周運動，由牛頓第二運動定律可得：

$$F_c = ma_c = mR\omega^2 = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

然而這個向心力正是由於物體所受的引力 $F_m$ 而來，所以 $F_c = F_m$ ，又由於克卜勒第三定律可知：

$$\frac{R^3}{T^2} = K \text{ 與 m 無關}$$

$$\Rightarrow F_m = \frac{4\pi^2 mR}{\frac{R^3}{K}} = \frac{4\pi^2 Km}{R^2}$$

上面這個式子似乎與 M 無關，但是由牛頓第三運動定律得知，M 也一樣會繞著 m 作圓周運動，且 $F_M$=$F_m$，所以以對等的立場來看

$$\Rightarrow F_M = \frac{4\pi^2 K'M}{R^2}$$

比較上面兩個式子，可以得知，K 與 m 無關但是與 M 有關，K’與 M 無關但是與

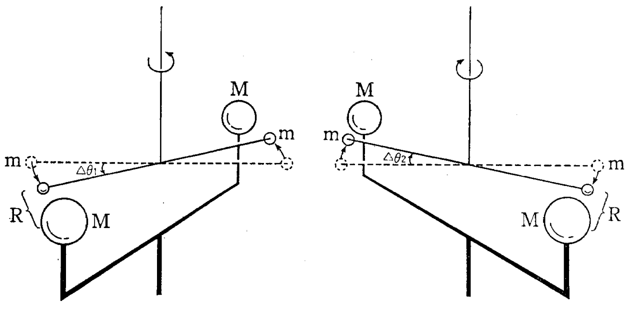
m 有關：

$$F \propto M, F \propto m, F \propto \frac{1}{R^2}$$

於是我們寫下萬有引力的公式：

$$\boxed{F = \frac{GMm}{R^2}}$$

其中 G 為萬有引力常數，它把剛才的 $4\pi^2$ 及 K 都融入其中，並且是一個普遍性的常數，不受時間地點而改變，至於測量 G 的方法則由卡文狄西在 1798 年經由實驗測得，方法如下圖：




如此可得到

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 / kg \cdot s^2$$

※ 剛才我們用的 M、m 都是假設為質點，並且假設為等速率圓周運動，但是實際上並非如此，這時候就一定要用微積分來運算了，這就是為什麼牛頓對虎克的說法生氣的原因了。

※ 牛頓特別說明，它並沒有解釋為什麼會有萬有引力，他只是用數學形式來表示引力，這是一種『假說』，值到目前也沒有人能說明為什麼有萬有引力，這是科學家對科學嚴謹與負責的態度。

※ 另外請特別注意這裡的 G 與重力加速度 g 是不一樣的。

## 6-2 (2) 萬有引力的應用問題

如果以地球 M 為座標系的原點，月球 m 繞軌道運行，經由牛頓第二運動定律得知：

$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{i}$，負號代表引力是指向中心

這是一個微分方程式，沒有必要去記它，只是當 m 的質量不變時，又可以寫成

$$F = mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

這代表重力加速度會隨著距離的遠近而變，如果我們將地球質量 M=5.98×$10^{24}$kg，及地球半徑 R=6.38×$10^{6}$m 帶入，則會得到地表附近的 g 為 9.8m/$s^2$。

## 6-3 重力場

接下來要講一個很重要的觀念，這個觀念到後面的電磁學更會用到，那便是「場」的概念。

顧名思義，場就是一種空間的分布，為的是將萬有引力、電力及磁力等超距力藉由場的觀念分布在空間之中（包含真空），重力場在數學上的定義為：每單位質量的物體在某個位置受到的重力稱為該位置的重力場強度。

$$F = \frac{GMm}{r^2} = mg \Rightarrow \boxed{g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2}}$$

根據上式我們得知其實重力場強度就是該點的重力加速度，更具體的說：質量 M 的物體在距離 r 的位置發佈了一個場，大小為 $\frac{GM}{r^2}$；又由於力為向量，所以根據上式可知，場也是一種向量，重力場的方向為指向 M（引力）。

另外由於場是向量，若有數個場同時作用於某個位置時，則該位置的場即為所有場的向量和，必須運用向量的加法來求得。